I . Définition de *cos* et *sin* par les séries entières.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

1°) *cos* 0 = 1 et *sin* 0 = 0.
2°) Les fonctions *cos* et *sin* sont définies sur R (i.e. le rayon de convergence des séries est $+\infty$).
3°) *cos* est paire et *sin* est impaire.
4°) *cos* et *sin* sont continues sur R.
5°) *cos* et *sin* sont dérivables sur R et (*cos*)' = – *sin* et (*sin*)' = *cos*.
6°) Pour tout x dans R, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
7°) *cos* et *sin* sont bornées sur R : pour tout x dans R, | *cos* x | ≤ 1 et |*sin* x| ≤ 1 .
8°) Pour tous réels a et b, *cos* (a + b) = *cos* a *cos* b - *sin* a *sin* b. Et les autres formules d'addition, de duplication, …etc.
9°) Il existe un réel T > 0 tel que *sin* T = 0 et *cos* T = 1.
10°) *cos* et *sin* sont périodiques, de période Min{T > 0 ; *sin* T = 0 et *cos* T = 1} et on note ce nombre 2π.
11°) La fonction $x \quad (\cos x \,;\, \sin x)$ est une bijection de [0 ; 2π[vers C(O ; 1), le cercle unité de centre O, origine du plan et de rayon 1, donc la fonction $x \quad (\cos x \,;\, \sin x)$ paramètre le cercle unité.
12°) La longueur du cercle unité C(O ; 1) est 2π. La longueur d'un cercle de rayon R est 2π×R.

II . Définition et propriétés de l'exponentielle complexe

Pour tout complexe *z*, on appelle *exponentielle* du nombre complexe *z* : $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

1°) La fonction *exp* : z   exp *z* est définie sur tout C (*i.e*. converge sur C tout entier).
2°) *exp* est continue et dérivable sur C et d(exp *z*)/dz = exp.
3°) L'exponentielle complexe prolonge l'exponentielle réelle (on peut alors noter exp $z = e^z$).
4°) exp *(z+z')* = exp *(z)* exp *(z')*
5°) $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$
6°) $|\exp(z)| = e^{Re(z)}$

On pose $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}$ et $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

7°) Les fonctions complexes *cos* et *sin* sont définies sur C et prolongent les fonctions *cos* et *sin* réelles.
8°) *cos* et *sin* sont continues et dérivables sur C et d(cos *z*) / d*z* = – sin *z* et d(sin *z*) / d*z* = cos *z* .
9°) *cos* est une fonction paire et *sin* est une fonction impaire.
10°) exp *(i z)* = cos *(z)* + *i* sin *(z)*
11°) $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
12°) Pour tout z complexe : $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
13°) *exp* est périodique de période 2π*i* et *cos* et *sin* (définies sur C) sont périodiques de période 2π.
14°) *exp, cos et sin* ne sont pas bornées sur C.
15°) Les fonctions complexes *cos* et *sin* ont les mêmes racines que les fonctions réelles correspondantes.

I 2°, I 4° et I 5° . On applique le critère de D'Alembert (voir dém. II 1°) pour prouver que le rayon de convergence est $+\infty$ donc les séries entières *cos* et *sin* convergent normalement donc uniformément sur tout compact de R donc elles sont C^{∞} sur tout compact de R donc sur R.

I 3°. Immédiat à partir de la définition de *cos* et *sin* par les séries entières.

I 6° . $\dfrac{d\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}{dx}=2\cos x(-\sin x)+2\sin x\cos x=0$ donc la fonction $x \quad \cos^2 x+\sin^2 x$ est constante sur R et vaut sa valeur en 0 soit $\cos^2 0+\sin^2 0=1$.

I 7°. D'après I 6°.

I 8°. A l'aide de l'exponentielle complexe (II 7° et II 8°).

I 9° . On suppose que pour tout $x > 0$, $\cos x > 0$.
Alors la fonction *sin* est croissante (car sin ' = cos), mais *sin* est bornée donc, nécessairement, en notant *sin'* la fonction dérivée de *sin* : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin' x=0$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x=0$ (Il suffit de raisonner par l'absurde).
Or, puisque $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=0$, mais *cos'* = –*sin* donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos' x=-1$, ce qui est impossible vu que la fonction *cos* est bornée. Donc il existe un réel $r > 0$ tel que $\cos r = 0$.

Alors $\cos 2r = 2\cos^2 r - 1 = -1$ et $\sin 2r = 2\cos r\sin r = 0$.
Il suit que $\cos 4r = 2\cos^2 2r - 1 = 1$ et $\sin 4r = 2\cos 2r\sin 2r = 0$.
Donc en posant $T = 4r$, on a un réel $T > 0$ tel que $\sin T = 0$ et $\cos T = 1$. CQFD

I 10°. On cherche $T > 0$ tel que $\cos(x + T) = \cos x$.
Comme $\cos(x + T) = \cos x\cos T - \sin x\sin T$, d'après I 8°,

On cherche donc T > 0 tel que :	$\cos x(1 - \cos T) - \sin x\sin T = 0$	(A)
Par dérivation de (A), on obtient :	$-\sin x(1 - \cos T) - \cos x\sin T$	(B)
(A) × sin *x* + (B) × cos *x* donne :	$-\sin^2 x\sin T - \cos^2 x\sin T = 0$ soit $\sin T = 0$	
(A) × cos *x* – (B) × sin *x* donne :	$\cos^2 x(1 - \cos T) + \sin^2 x(1 - \cos T) = 0$ soit $\cos T = 1$	

On cherche donc $T > 0$ tel que $\sin T = 0$ et $\cos T = 1$. Il existe d'après I 9°.

Réciproquement : Soit $T > 0$ tel que $\sin T = 0$ et $\cos T = 1$,
$\cos(x + T) = \cos x\cos T - \sin x\sin T = \cos x$ donc *cos* est périodique et T appartient à l'ensemble *P* des périodes de la fonction *cos* qui est un sous-groupe de R, donc qui est soit dense dans R, soit un sous-groupe discret de la forme *p*Z où *p* est un réel appelé la *période fondamentale* .
Si *P* est dense dans R : soit *t* dans R et $(t_n)_n$ une suite de *P* convergeant vers *t*, pour tout réel *x*, $\cos(x + t_n) = \cos x$ et $\lim \cos(x + t_n) = \cos(x + t)$ puisque *cos* est continue, donc tout réel *t* est une période . Mais puisque la fonction *cos* n'est pas constante, l'ensemble de ses périodes n'est pas R tout entier.
On note $2\pi = \text{Min}\ \{ T > 0 ; \sin T = 0 \text{ et } \cos T = 1 \}$ la période fondamentale de la fonction *cos*.
On démontre de même que *sin* est périodique de période $T = 2\pi$.

I 11°. On étudie facilement les variations des fonctions *cos* et *sin* sur $[0 ; 2\pi[$ à l'aide de ce qui précède et on en déduit ce résultat.

I 12°.On note *C* le cercle de centre O et de rayon 1. La longueur de *C* est $\int_C ds$ où *s* est une abscisse curviligne décrivant *C*. En paramétrant le cercle *C* avec $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$, on a
$ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\ dt=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\ dt=dt$ d'où $\int_C ds=\int_0^{2\pi} dt=2\pi$.

II 1° . On utilise la règle de D'Alembert : "Si $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = a < 1$ alors $\sum u_n$ converge absolument."

$\forall z \in$ C , $\frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$ donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument donc converge pour tout z dans C.

II 2° . $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout z dans C donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$ donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge normalement donc uniformément sur tout compact de C donc elle est C^∞ sur tout compact de C donc sur C.

II 3° . Les deux suites $\left(\overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}}\right)_n$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\bar{z})^k}{k!}\right)_n$ sont égales (égalité termes à termes) et convergent toutes les deux (convergence absolue de $\sum \frac{z^n}{n!}$ …) donc leurs limites sont égales.

II 4° . $e^{a+b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n!} a^k b^{n-k}$

$\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente donc on peut effectuer le produit des deux séries entières termes à termes : $e^a e^b = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n!} a^k b^{n-k}$ car $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

II 5° . Immédiat à partir de la définition d'*exp* par la série entière.

II 6° . $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z)\exp(\bar{z}) = \exp(z+\bar{z}) = \exp(2\,Re(z))$

Et Re(z) est un réel donc $\exp(2\,Re(z)) = e^{2\,Re(z)}$ (exponentielle réelle) et $e^{\mathrm{Re}(z)} > 0$, donc $|\exp(z)| = e^{Re(z)}$.

II 7° .

$\forall z \in C,\ |\cos\ z| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^{2n}}{2n!}\right| \le \sum \left|\frac{z^n}{n!}\right|$ et $|\sin\ z| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \le \sum \left|\frac{z^n}{n!}\right|$

et $\forall z \in C,\ \sum \left|\frac{z^n}{n!}\right|$ converge.

II 10°. Immédiat à partir de la définition de *cos* et *sin* par les séries entières.

II 11° . On utilise II 10° et II 9°.

II 13°. Soit $T = a + ib$, avec a et b réels, tel que pour tout z complexe $e^{z+T} = e^z$,
On a alors $e^T = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = 1$ d'où $|e^a e^{ib}| = |e^a|\,|e^{ib}| = |e^a| = e^a = 1$, où e^a est l'exponentielle réelle, donc on obtient $a = 0$.
On a donc $e^T = e^{ib} = \cos b + i \sin b = 1$ d'où cos b = 1 et sin b = 0.
On en déduit que b est la période de la fonction réelle *cos*, i.e. 2π, d'après I 10°.
Donc $T = ib = 2i\pi$.